Esercizi di matematica

Geometria analitica e disequazioni irrazionali

2 Aprile 2008

1 Geometria analitica

Nel testo si sottintende che le coniche in questione abbiano assi di simmetria coincidenti con gli assi coordinati.

1. Si scrivano le equazioni delle ellissi soddisfacenti le seguenti condizioni:

(a) avente vertici in $V_1(1,3)$ e $V_2(4,6)$;

(b) avente un vertice nel punto $V_1(2,3)$ ed un fuoco nel punto $F_1(-3,0)$;

(c) centrata in $C(2,3)$ e passante per i punti $A(4,3)$ e $B(2,7)$;

(d) avente come asse il segmento $\overline{OA}$ con $O(0,0)$ ed $A(0,2)$ ed un vertice giacente sulla retta $y=7$;

(e) avente come fuochi i punti $F_1(1,-3)$ ed $F_2(1,1)$ passante per l'origine; item avente vertici nei punti $V_1(3,5)$ e $V_2(3,7)$ e passante per il punto $P(4,6)$;

(f) avente un fuoco in $F_1(3,4)$ ed un vertice in $V_1(7,4)$ e passante per il punto $P(2,5)$;

(g) centrata nell'origine e passante per i punti $A\left(2\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $B\left(-2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. Siano $A(0,1)$ e $B(0,5)$. Si scriva l'equazione del luogo dei triangoli aventi perimetro $2p=17$ con base il segmento $\overline{AB}$. Successivamente si determini tra questi il triangolo avente area maggiore.

3. È dato il punto $P_\theta(a\cos\theta, b\operatorname{sen}\theta)$, con θ parametro. Determinare l'espressione analitica del luogo geometrico descritto da tale punto. Successivamente, si studi la funzione $d(\theta)$, distanza del punto dall'origine. (*Suggerimento: si distinguano i casi $a<b$, $a=b$ ed $a>b$.*)

4. Data l'ellisse di equazione $9x^2-54x+4y^2+8y+49=0$ si determinino le tangenti passanti dall'origine e passanti dal punto $P(5,-4)$.

5. Dell'ellisse γ si sa che sta interamente sul primo quadrante, è tangente ad entrambe gli assi cordinati e che ha rapporto di eccentricità $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, ed è tangente alla retta di equazione $x+3y-24=0$. (*Suggerimento: si consiglia di trovare subito dal rapporto di eccentricità la dilatazione/contrazione corrispondente...*)

6. Si dimostri che data la generica ellisse centrata nel punto C:

$$\frac{(x-x_C)^2}{a^2}+\frac{(y-y_C)^2}{b^2}=1$$

il vettore normale alla retta tangente nel punto (x_T,y_T) è $\left(\frac{(x_T-x_C)}{a^2}, \frac{(y_T-y_C)}{b^2}\right)$.

Attenzione: il risultato teorico di questo esercizio potrà essere utile nello svolgimento di altri esercizi!

7. Siano $A(4,0)$ e $B(0,4)$. Si consideri il quadrato di lato $\overline{AB}$ contenente l'origine. Tra tutte le ellissi inscrittibili in tale quadrato, e ad esso concentriche, si trovino quelle aventi area π, e quella di area massima. (*Suggerimento: si consiglia, utilizzando anche il punto precedente, di trovare l'equazione dell'ellisse tangente per un punto* $T(t, 4-t)$*...*)

8. Si scrivano le equazioni delle iperboli soddisfacenti le seguenti condizioni:

(a) con centro nel punto $C(0,3)$, un fuoco nel punto $F_1(0,6)$ ed un vertice giacente sulla retta $y=2$;

(b) con asintoto le retta $x+y-1=0$, centro di simmetria sulla retta $y=3$ ed un vertice sulla retta $y=5$;

(c) con un vertice nel punto $P(3,6)$, avente per asintoto la retta $x+y=4$ e sapendo che ha fuochi sull'asse delle ordinate;

(d) con un fuoco nell'origine, avente come asintoto la retta $y=x+3$ e sapendo che l'altro fuoco si trova sull'asse delle ascisse;

(e) con asintoto la retta $y=\frac{3}{2}x$, un vertice nel punto $V_1(2,3)$ e passante per il punto $P\left(3, \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$;

(f) con un fuoco nel punto $F_1(-2,5)$, un vertice nel punto $V_1(-2,6)$ e passante per i punti $P(0, 3\sqrt{2}+1)$ e $Q\left(1, \frac{\sqrt{117}}{2}+1\right)$;

9. È dato il punto $P_\theta\left(\frac{1}{\cos\theta}, \operatorname{tg}\theta\right)$ con $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Determinare il luogo geometrico descritto dal punto P al variare del suo parametro. Si studi inoltre la funzione $d(\theta)$, distanza del punto dall'origine.

10. Si consideri l'iperbole di equazione $x^2-y^2=1$, e sia $P(x=t)$ un suo punto generico. Da tale punto si tracci la retta tangente che incontra l'asse delle ascisse nel punto B e l'asintoto con coefficente angolare positivo nel punto A. Si ricavi dunque $\mathcal{A}(t)$, area del triangolo PAB. Si ricavino i valori di t per cui tale area assume valore k.

11. Si consideri l'iperbole avente vertici nei punti $V_1(2,-1)$ e $V_2(2,7)$, e rapporto di eccentricità $e=\frac{c}{b}=\frac{5}{4}$. Si consideri poi il fascio di rette $r_k: kx+(1-k)y-3(k+1)=0$; dire per quali valori di k il fascio interseca l'iperbole.

12. Si consideri la generica iperbole di equazione:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

e sia $P(k,0)$. Si tracci da P la tangente all'iperbole nel punto di acsissa x_T. Da questo punto si tracci la perpendicolare che interseca l'asse delle ascisse nel punto S. Determinare il valore di k affinchè, detta O l'origine si verifichi $\overline{PO}=\overline{OS}$. (*Suggerimento: non si tralasci qualche considerazione sintetica...*)

13. Si considerino le coniche di equazioni:

$$\gamma_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad\qquad \gamma_2: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

(a) determinare i coefficienti a e b sapendo che il rapporto di eccentricità dell'ellisse vale $e=\frac{3}{5}$ e che la distanza tra il fuoco sinistro dell'ellisse e quello sinistro dell'iperbole vale $d=5\sqrt{41}-15$;

(b) determinare i coefficienti a e b sapendo che tali coniche si incontrano nel punto $P(1,1)$.

2 Disequazioni irrazionali

Si risolvano in maniera oculata le seguenti disequazioni irrazionali:

1. $\sqrt{|2x^2-1|} > \sqrt{|2x-1|}$

2. $\sqrt[3]{\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x-3}} > \sqrt{x-2}$

3. $\sqrt{1+\dfrac{1}{x}} > \dfrac{x+1}{x}$

4. $\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x} \leq 1$

5. $\sqrt{-\left|\sqrt[5]{x+x^7}\right|-x^2} < \sqrt[29]{x+x^3+\dfrac{1}{x}-1}$